Lycée 02-Mars-1934 Tabarka

Devoir de contrôle N°1
Mathématiques

Classes : 4 sc. Ex$_{p1+3}$
Durée : 2h
Zouaoui F-Rjaibi A

Exercice № 01(4.5points)

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1) La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{n+1} + (-1)^n$ est convergente
2) Le nombre complexe $a = (\sqrt{3} + i)^{2010}$ est imaginaire pur
3) $\frac{13\pi}{12}$ est un argument du nombre complexe $z = -\frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$
4) Soit θ un réel. L'ensemble des points M d'affixe $z = 1 - 3i + e^{2i\theta}$ est le cercle de centre le point $J(-1+3i)$ et de rayon 1
5) Pour tout nombre complexe z , si |1 + i z| = |1 − i z| , alors la partie imaginaire de z est nulle
6) Dans le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives non nulles z_A et z_B telle que $z_B = iz_A$.
Le triangle OAB est alors rectangle isocèle en O

Exercice № 02(5points)

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + \sqrt{x}\cos x}{x+2} & si\, x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{4(\sqrt{x^2+1} - 1)} & si\, x \prec 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0
2) a/ Montrer que pour tout réel positif x on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$
   b/ En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$
3) Déterminer, en justifiant la réponse, les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(\frac{1}{\sqrt{x}})$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(1 - \sin x)$
4) a/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ une solution qu'on notera α
   b/ Montrer que $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha - 1}$

Exercice № 03(5points)

1-a/ Vérifier que : $(1+\sqrt{3}+2i)^2 = 2\sqrt{3}+4i\,(1+\sqrt{3})$

b/ Résoudre alors dans C l'équation : $z^2-(3+\sqrt{3})z+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-i)=0$ et mettre les solutions sous forme algébrique

2-Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2cm) on considère les points $A;B$ et Ω d'affixes respectives $z_A=1-i$ $z_B=2+\sqrt{3}+i$ et $z_\Omega=2$

Soit ζ le cercle de centre Ω et de rayon 2

a/ Vérifier que $B\in\zeta$

b/ Placer les points A et Ω .Construire alors le point B

3-a/ Ecrire z_A sous forme exponentielle

b/ Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique

c/ Montrer que $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

d/ En déduire la forme exponentielle de z_B

e/ Déterminer alors la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{12})$

Exercice № 04(4.5points)

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0=3$, $b_0=1$ et pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1}=\frac{2a_n+b_n+3}{3}$ et $b_{n+1}=\frac{a_n+2b_n+3}{3}$. On pose $u_n=a_n-b_n$

1) a/ Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n=2(\frac{1}{3})^n$

b/ En déduire la limite de (u_n)

2) On pose , pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\frac{a_n+b_n}{n}$

a/ Montrer que pour tout $n\geq 1$ on a : $v_n\geq 2$

b/ Montrer que pour tout $n\geq 1$ on a : $v_{n+1}=v_n+\frac{2-v_n}{n+1}$.

c/ En déduire que (v_n) converge vers un réel $l\succ 0$

2) Exprimer alors a_n et b_n en fonction de u_n , v_n et n puis déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n).

Bon courage